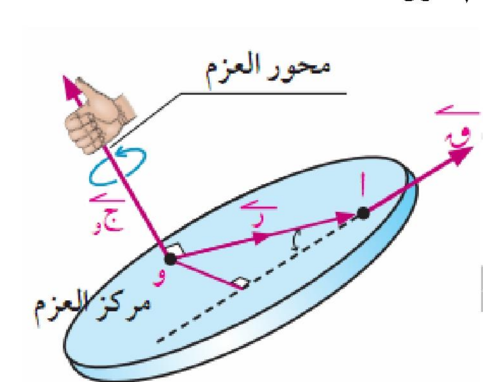
الوحدة الثانية
العزوم

٢ - ١ عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثنائى الأبعاد

عزم قوة حول نقطة فى نظام إحداثى ثنائى الأبعاد:

عزم القوة حول نقطة هو مقدرة القوة على إحداث حركة دورانية للجسم حول هذه النقطة

فإذا كانت أ نقطة على خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$ وكان $\overrightarrow{ر}$ متجه موضع النقط أ فإن عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة (و) ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ج}_{و}$ يكون:



$$\overrightarrow{ج}_{و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$$

تسمى النقطة (و) مركز العزم ويسمى المستقيم المار بالنقطة (و) عموديا على المستوى بمحور العزم ونلاحظ أن عزم القوة هو كمية متجهه ويتحدد إتجاهه تبعا لقاعدة اليد اليمنى.

ملاحظات:

(١) عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة (و) مقدار ثابت ولايتوقف على النقطة التى نختارها على خط عمل القوة وذلك لأنه بإختيار نقطة أخرى مثل $أ_٢$ حيث متجه موضعها $\overrightarrow{ر}_٢$ نـجد أن:

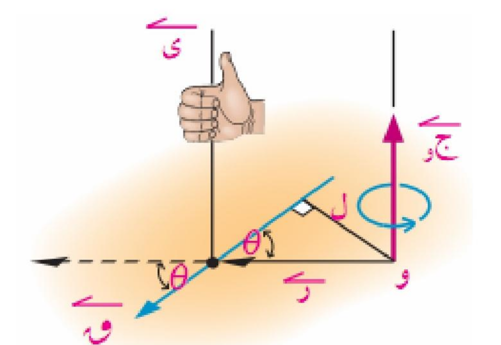
$$\overrightarrow{ج}_{و} = \overrightarrow{ر}_٢ \times \overrightarrow{ق} = (\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{أأ_٢}) \times \overrightarrow{ق}$$

$$= \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} - \overrightarrow{أأ_٢} \times \overrightarrow{ق}$$

$\because \overrightarrow{أأ_٢} \parallel \overrightarrow{ق}$ ، $\therefore \overrightarrow{أأ_٢} \times \overrightarrow{ق} = \overrightarrow{٠}$ $\quad \therefore \overrightarrow{ج}_{و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$

(٢) ينعدم عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ (غير الصفرية) إذا كان $\overrightarrow{ر} = ٠$ أى إذا كان خط عمل القوة يمر بمركز العزم وبالتالى فأن <u>عزم القوة حول نقطة على خط عملها = صفر</u>

مفاهيم أساسية:



(١) عزم قوة بالنسبة لنقطة:

$\because \overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$ ومن تعريف الضرب الإتجاهى نـجد أن:

$$\overleftarrow{ج_و} = (||\overleftarrow{ق}||\ ||\overleftarrow{ر}||\ جا\theta)\ \overleftarrow{ى}$$

حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحده عمودى على مستوى $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$

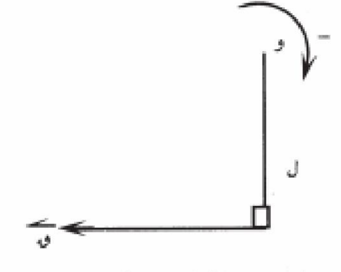
وبفرض أن: $||\overleftarrow{ق}|| = ق$ ، $||\overleftarrow{ر}|| = ر$ ، طول العمود الساقط من (و) على خط عمل $\overleftarrow{ق}$ هو ل

فمن الشكل السابق نـجد أن: ل = ر جاهـ

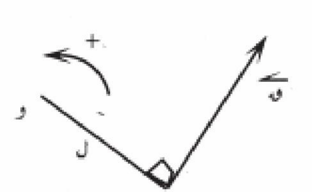
$$\therefore \overleftarrow{ج_و} = (ق\ ل)\ \overleftarrow{ى}$$

(٢) القياس الجبرى للعزم:

- القياس الجبرى لمتجه العزم حول نقطة يكون **موجب**
إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى **إتجاه عكس عقارب الساعة**
- القياس الجبرى لمتجه العزم حول نقطة يكون **سالب**
إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى **إتجاه مع عقارب الساعة**



الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة $ج_و = -ق\ ل$

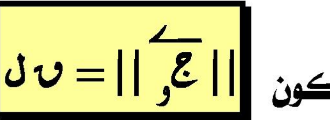


الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة $ج_و = ق\ ل$

حيث ق = مقدار القوة ، ل = طول العمود الساقط من النقطة المطلوب حولها العزم على خط عمل القوة
ويسمى (ل) **ذراع القوة أو ذراع العزم** كما تسمى النقطة المطلوب حولها العزم **مركز العزم**

(٣) معيار العزم:

معيار العزم هو $||\overleftarrow{ج_و}||$ ويكون



∴ معيار عزم قوة حول نقطة = معيار القوة × طول العمود الساقط من النقطة على خط عمل القوة

$\therefore$ ل $= \frac{\| \overrightarrow{جـ_و} \|}{ق}$

أى أن طول العمود الساقط من نقطة على خط عمل القوة يساوى معيار العزم حول النقطة على معيار القوة

(٤) **وحدة قياس مقدار العزم:**

وحدة قياس مقدار العزم = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الطول

أى أن وحدة قياس العزم هى: نيوتن . متر أو داين .سم أو ث كجم . متر

مثـــال:

إذا كانت $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية لمتجهات الوحدة وكانت $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (٢ ، ٣) أوجد:

(أ) عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (٢ ، ١).

(ب) طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة.

تذكر أن:
$\overrightarrow{ر}$ هو المتجه الواصل من مركز العزم إلى أى نقطة على خط عمل القوة

الحـــل:

(أ) $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٢ ، ٣) - (٢ ، ١) = (٠ ، ٢)$

$\therefore \overrightarrow{جـ_ب} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = (٠ ، ٢) \times (١ ، -٢) = (٠ \times (-٢) - ٢ \times ١) \overrightarrow{ع} = -٢ \overrightarrow{ع}$

(ب) ل $= \frac{\| \overrightarrow{جـ_و} \|}{ق} = \frac{٢}{\sqrt{١^٢ + (-٢)^٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

مثـــال:

تؤثر القوتان $\overrightarrow{ق_١} = م\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} =$ ل $\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ فى النقطتين $أ_١ (١ ، ١)$ ، $أ_٢ (-١ ، -٢)$ على الترتيب عين قيمة كل من الثابتين م ، ل بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين حول نقطة الأصل وحول النقطة ب (٢ ، ٣)

الحـــل:

العزوم حول نقطة الأصل و (٠ ، ٠)

$\overrightarrow{ر_١} = \overrightarrow{وأ_١} = (١ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ر_٢} = \overrightarrow{وأ_٢} = (-١ ، -٢)$

∵ مجموع عزمى القوتين حول نقطة الأصل يساوى صفر

∴ $\overleftarrow{\text{ر}}_{١} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{١} + \overleftarrow{\text{ر}}_{٢} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = \overleftarrow{\text{و}}$ ∴ (١ ، ١) × (م ، ٢) + (−١ ، −٢) × (ل ، −١) = ٠

∴ ٢ − م + ١ + ٢ل = ٠ ∴ − م + ٢ل = −٣ (١)

العزوم حول نقطة ب (٢ ، ٣)

$\overleftarrow{\text{ر}}_{١} = \overleftarrow{\text{ب أ}}_{١} = \overleftarrow{\text{أ}}_{١} - \overleftarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ١) − (٢ ، ٣) = (−١ ، −٢)

، $\overleftarrow{\text{ر}}_{٢} = \overleftarrow{\text{ب أ}}_{٢} = \overleftarrow{\text{أ}}_{٢} - \overleftarrow{\text{ب}}$ = (−١ ، −٢) − (٢ ، ٣) = (−٣ ، −٥)

∵ مجموع عزمى القوتين حول نقطة ب يساوى صفر

∴ $\overleftarrow{\text{ر}}_{١} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{١} + \overleftarrow{\text{ر}}_{٢} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = \overleftarrow{\text{و}}$

∴ (−١ ، −٢) × (م ، ٢) + (−٣ ، −٥) × (ل ، −١) = ٠

∴ −٢ + ٢م + ٣ + ٥ل = ٠ ∴ ٢م + ٥ل = −١ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) جبريا بضرب المعادلة الأولى ×٢ وجمعها مع المعادلة الثانية

∴ ٩ل = −٧ **∴ ل = $\frac{-٧}{٩}$** بالتعويض فى (١)

∴ − م + ٢ × $\frac{-٧}{٩}$ = −٣ ∴ م = $\frac{-١٤}{٩}$ + ٣ **∴ م = $\frac{١٣}{٩}$**

مثال:

إذا كان || $\overleftarrow{\text{ق}}$ || = ١٠ وكانت $\overleftarrow{\text{ق}}$ تعمل فى $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ (−٣ ، ١) ، ب (١ ، ٤)

أوجد عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول نقطة الأصل

الحل:

∵ $\overleftarrow{\text{ق}}$ تعمل فى $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{ق}}$ = معيار $\overleftarrow{\text{ق}}$ × متجه الوحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$

∵ $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٤) − (−٣ ، ١) = (٤ ، ٣)

∴ $\overleftarrow{\text{ى}}_{\text{أب}} = \frac{\overleftarrow{\text{أب}}}{||\overleftarrow{\text{أب}}||} = \frac{(٤ ، ٣)}{\sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}}}$ = ($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$)

∴ $\overleftarrow{\text{ق}}$ = (|| $\overleftarrow{\text{ق}}$ ||) $\overleftarrow{\text{ى}}_{\text{أب}}$ = ١٥ × ($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$) = (١٢ ، ٩)

$\therefore \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و\text{أ}} = (-٣ ، ١)$

$\therefore \overleftarrow{جـ_و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (-٣ ، ١) \times (١٢ ، ٩) = (-٢٧ - ١٢)\overleftarrow{ع} = -٣٩\overleftarrow{ع}$

ملاحظة: يمكن إيجاد عزم $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة الأصل بأخذ $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و ب}$ وسنحصل على نفس النتيجة.

مبدأ العزوم (نظرية فارينون):

عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

فإذا كانت $\overleftarrow{ق} = ق_س \overleftarrow{س} + ق_ص \overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة أ

وكان متجه موضع نقطة أ هو $\overleftarrow{ر} = (س ، ص)$

فإن عزم $\overleftarrow{ق}$ حول (و) يكون:

$\overleftarrow{جـ_و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (س ، ص) \times (ق_س ، ق_ص)$

$\therefore \overleftarrow{جـ_و} = (س ق_ص)\overleftarrow{ع} + (-ص ق_س)\overleftarrow{ع} =$ عزم $ق_ص$ حول و + عزم $ق_س$ حول و

مثـــال:

فى الشكل المقابل:

احسب القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة أ

الحـــل:

نحلل القوة ١٠٠ نيوتن إلى مركبتين:

$ق_١ = ١٠٠$ جتا $٤٠^\circ = ٦٧,٦$ نيوتن

، $ق_٢ = ١٠٠$ جا $٤٠^\circ = ٦٤,٣$ نيوتن

وطبقا لنظرية فارينون يكون:

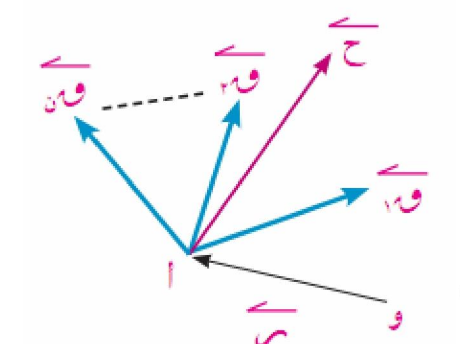
$جـ_أ =$ عزم $ق_١$ حول أ + عزم $ق_٢$ حول أ

$جـ_أ = -ق_١ \times ١,٤ + ق_٢ \times ٠,٤ = -٦٧,٦ \times ١,٤ + ٦٤,٣ \times ٠,٤ = -٦٨,٩$ نيوتن متر

نظرية:

مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة نفس النقطة

البرهان:



بفرض أن $\overrightarrow{ق}_1$، $\overrightarrow{ق}_2$، $\overrightarrow{ق}_3$، . . .، $\overrightarrow{ق}_ن$ مجموعة من القوى متلاقية

فى نقطة أ وأن محصلتها هى $\overrightarrow{ح}$ ، نقطة و هى مركز العزم

∴ مجموع عزوم القوى حول و

$= \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}_2 + \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}_3 + \cdots + \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}_ن$

$= \overrightarrow{ر} \times (\overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2 + \overrightarrow{ق}_3 + \cdots + \overrightarrow{ق}_ن) = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ح}$

∴ مجموع عزوم القوى حول و = عزم محصلة هذه القوى حول نفس النقطة و

مثال:

تؤثر القوى $\overrightarrow{ق}_1 = ٣\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2 = -٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ فى النقطة أ (-١ ، ٤)

أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول ب (١ ، ١) ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول ب ماذا تلاحظ؟

الحل:

∵ $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (-١ ، ٤) - (١ ، ١) = (-٢ ، ٣)$

∴ مجموع عزوم القوى حول ب $= \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}_2$

$= (-٢ ، ٣) \times (٣ ، -١) + (-٢ ، ٣) \times (-٢ ، -٣)$

$= (٢ - ٩)\overrightarrow{ع} + (٦ + ٦)\overrightarrow{ع}$

$= -٧\overrightarrow{ع} + ١٢\overrightarrow{ع} = ٥\overrightarrow{ع}$

∵ محصلة القوى $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2 = (٣\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}) + (-٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}) = \overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$

وتؤثر فى نقطة أ ∴ $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ب أ} = (-٢ ، ٣)$

∴ عزم محصلة القوى حول ب $= \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ح} = (-٢ ، ٣) \times (١ ، -٤)$

$= ((-٢)\times(-٤) - ١\times٣)\ \overleftarrow{ع} = (٨ - ٣)\ \overleftarrow{ع} = ٥\ \overleftarrow{ع}$

نلاحظ أن مجموع عزوم القوى حول ب = عزم محصلة هذه القوى حول ب

النظرية العامة للعزوم:

المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة

نتائج هامة:

١) المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول أى نقطة على خط المحصلة يساوى صفرا

٢) إذا كان المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة يساوى صفر
فإما أن تكون المحصلة مساوية للصفر أو يكون خط عمل المحصلة يمر بهذه النقطة

٣) إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول ب
فإن خط عمل المحصلة // $\overleftrightarrow{أب}$

٤) إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول جـ = − مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول ء
فإن خط عمل المحصلة ينصف $\overline{جء}$

مثـــال:

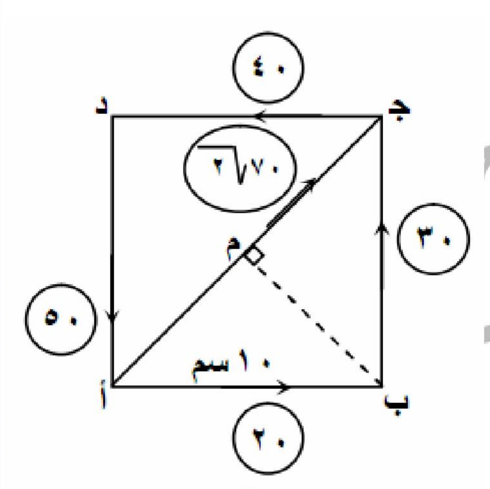
أب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم ، أثرت القوى ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٧٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ ، $\overleftarrow{جد}$ ، $\overleftarrow{دأ}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ على الترتيب احسب المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول الرأس ب وحول مركز المربع.

الحـــل:

∵ الشكل مربع ∴ الأبعاد العمودية للقوى التى فى الأضلاع معلومة

ولإيجاد البعد العمودى للقوة التى تعمل فى $\overleftarrow{أجـ}$ نرسم $\overline{بم} \perp \overline{أجـ}$

من المثلث أبم نـجد أن:



$بم = أب جا ٤٥^\circ = ١٠ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٥\sqrt{٢}$ سم

العزوم حول ب:

القوى التى تمر بالنقطة ب يكون عزمها = ٠

$\therefore ج_{ب} = ٤٠ \times ١٠ + ٥٠ \times ١٠ - ٧٠\sqrt{٢} \times ٥\sqrt{٢}$

$= ٠ + ٠ + ٤٠٠ + ٥٠٠ - ٧٠٠ = ٢٠٠$ نيوتن .سم

العزوم حول م:

البعد العمودى لجميع القوى ثابت ويساوى نصف طول الضلع

∴ $ج_م$ = ٢٠ × ٥ + ٣٠ × ٥ + ٤٠ × ٥ + ٥٠ × ٥ + ٧٠ $\sqrt{٢}$ × ٠

= ١٠٠ + ١٥٠ + ٢٠٠ + ٢٥٠ + ٠ = ٧٠٠ نيوتن.سم

حل آخر:

يتم تحليل القوة المائلة فى $\overleftarrow{أجـ}$ إلى مركبتين $ق_١$ ، $ق_٢$ فى إتجاهى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أد}$ حيث

$ق_١$ = ٧٠ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° = ٧٠ نيوتن

، $ق_٢$ = ٧٠ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° = ٧٠ نيوتن

العزوم حول ب:

القوى التى تمر بالنقطة ب يكون عزمها = ٠

∴ $ج_ب$ = ٤٠ × ١٠ + ٥٠ × ١٠ − ٧٠ × ١٠

= ٤٠٠ + ٥٠٠ − ٧٠٠ = ٢٠٠ نيوتن.سم

العزوم حول م:

البعد العمودى لجميع القوى ثابت ويساوى نصف طول الضلع

∴ $ج_م$ = ٢٠ × ٥ + ٣٠ × ٥ + ٤٠ × ٥ + ٥٠ × ٥ + ٧٠ × ٥ − ٧٠ × ٥

= ٥ × (٢٠ + ٣٠ + ٤٠ + ٥٠ + ٧٠ − ٧٠) = ٥ × ١٤٠ = ٧٠٠ نيوتن.سم

تذكر أن:

١) في المربع القطران متساويان ، ومتعامدان ، وينصف كل منهما الآخر ، وينصف كل منهما زاويتى الرأسين الواصل بينهما .

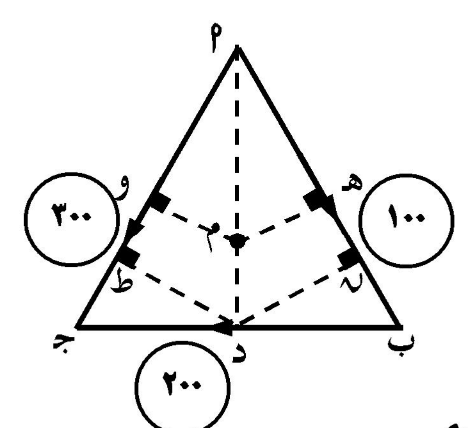
٢) طول قطر المربع = $\sqrt{٢}$ × طول ضلعه

مثــــال:

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، أثرت القوى ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ على الترتيب احسب المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى

أولا: حول نقطة ارتفاعات المثلث ثانيا: حول منتصف $\overline{بجـ}$

الحـــل:



العزوم حول م :

∵ أد = أجـ جا ٦٠° ∴ أد = $٢٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٠\sqrt{٣}$ سم

∵ م نقطة تقاطع المتوسطات ∴ م د = $\frac{١}{٣}$ أد

∴ م د = م هـ = م و = $\frac{١}{٣} \times ١٠\sqrt{٣} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم

∴ $جـ_م = (-١٠٠ - ٢٠٠ + ٣٠٠) \times \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣} = ٠$ نيوتن.سم

العزوم حول منتصف بجـ :

فى المثلث ب د ح : ∵ ب د = $\frac{١}{٢}$ بجـ = $\frac{١}{٢} \times ٢٠ = ١٠$ سم ، ∵ د ح = ب د جا ٦٠°

∴ د ح = د ط = $١٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٥\sqrt{٣}$ سم

∴ $جـ_د = -١٠٠ \times ٥\sqrt{٣} + ٣٠٠ \times ٥\sqrt{٣} = ١٠٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

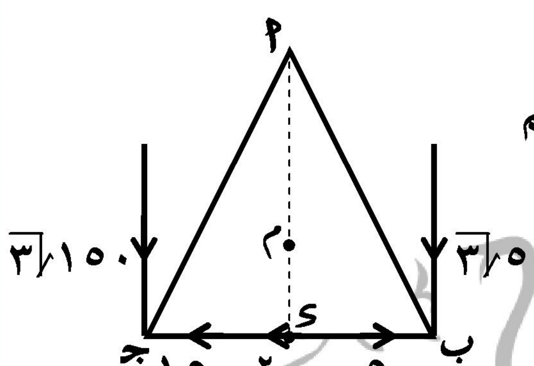
حل آخر:

يتم تحليل القوى المائلة فى $\overleftrightarrow{أب}$ وفى $\overleftrightarrow{أجـ}$ إلى مركبتين فى إتجاهين متعامدين وتطبيق نظرية فارينون

مركبتا القوة ١٠٠ نيوتن هما: ١٠٠ جتا ٦٠° = ٥٠ ، ١٠٠ جا ٦٠° = $٥٠\sqrt{٣}$

ومركبتا القوة ٣٠٠ نيوتن هما: ٣٠٠ جتا ٦٠° = ١٥٠ ، ٣٠٠ جا ٦٠° = $١٥٠\sqrt{٣}$

العزوم حول م :



∵ أد = أجـ جا ٦٠° ∴ أد = $٢٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٠\sqrt{٣}$ سم

∵ م نقطة تقاطع المتوسطات ∴ م د = $\frac{١}{٣}$ أد

∴ م د = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم ، ب د = د جـ = ١٠

∴ $جـ_م = (٥٠ - ٢٠٠ - ١٥٠) \times \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣} + (١٥٠\sqrt{٣} - ٥٠\sqrt{٣}) \times ١٠$

$= -١٠٠٠\sqrt{٣} + ١٠٠٠\sqrt{٣} = ٠$ نيوتن.سم

العزوم حول منتصف بجـ :

∴ $جـ_د = ١٥٠\sqrt{٣} \times ١٠ - ٥٠\sqrt{٣} \times ١٠ = ١٠٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

تذكر أن:

- فى أى مثلث نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة
- فى المثلث المتساوى الأضلاع تكون نقطة تقاطع المتوسطات هى نقطة تقاطع الإرتفاعات هى نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة
- فى المثلث القائم يكون طول العمود الساقط من رأس القائمة على الوتر يساوى حاصل ضرب طولا ضلعى القائمة مقسوما على طول الوتر
- طول الضلع المقابل لزاوية = طول الوتر × جيب (جا) الزاوية
- طول الضلع المجاور لزاوية = طول الوتر × جيب تمام (جتا) الزاوية

مثـــال:

تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ فى النقطة أ (–٣ ، ٢) فإذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول النقطتين ب (٣ ، ١) ، جـ (–١ ، ٤) يساوى ٢٨ $\overleftarrow{ع}$ أوجد $\overleftarrow{ق}$.

تذكر أن:

$\overleftarrow{ر}$ هو المتجه الواصل من مركز العزم إلى أى نقطة على خط عمل القوة

الحـــل:

نفرض أن $\overleftarrow{ق}$ = م $\overleftarrow{س}$ + ن $\overleftarrow{ص}$

العزم حول ب:

∵ $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ب أ}$ = $\overleftarrow{أ}$ – $\overleftarrow{ب}$ = (–٣ ، ٢) – (٣ ، ١) = (–٦ ، ١)

∴ $\overleftarrow{جـ}_{ب}$ = $\overleftarrow{ر}$ × $\overleftarrow{ق}$ = (–٦ ، ١) × (م ، ن) = (–٦ن – م) $\overleftarrow{ع}$ ، ∵ $\overleftarrow{جـ}_{ب}$ = ٢٨ $\overleftarrow{ع}$

∴ –٦ن – م = ٢٨ (١)

العزم حول جـ:

∵ $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{جـ أ}$ = $\overleftarrow{أ}$ – $\overleftarrow{جـ}$ = (–٣ ، ٢) – (–١ ، ٤) = (–٢ ، –٢)

∴ $\overleftarrow{جـ}_{جـ}$ = $\overleftarrow{ر}$ × $\overleftarrow{ق}$ = (–٢ ، –٢) × (م ، ن) = (–٢ن + ٢م) $\overleftarrow{ع}$ ، ∵ $\overleftarrow{جـ}_{جـ}$ = ٢٨ $\overleftarrow{ع}$

∴ –٢ن + ٢م = ٢٨ (٢)

بضرب المعادلة الأولى × ٢

∴ –١٢ن – ٢م = ٥٦ ، ∴ –٢ن + ٢م = ٢٨ بالجمع

∴ –١٤ن = ٨٤ ∴ ن = $\frac{-٨٤}{١٤}$ ← ∴ ن = –٦ بالتعويض فى (١)

$\therefore -6 \times (-6) - م = 28$ $\therefore م = 36 - 28$ ← $\therefore م = 8$

$\because \overleftarrow{ق} = م\overleftarrow{س} + ن\overleftarrow{ص}$ ← $\therefore \overleftarrow{ق} = 8\overleftarrow{س} - 6\overleftarrow{ص}$

مثـــال:

تؤثر القوى $\overleftarrow{ق}_1 = 2\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_2 = 4\overleftarrow{س} - 3\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_3 = -3\overleftarrow{س} - 2\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ (٠ ، ٢) وكانت النقط ب (٣ ، −٢) ، جـ (٢ ، ٣) ، ى (−٢ ، ١) ، هـ (−٥ ، ٥)

برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة:

أولا: يمر بنقطة ب ثانيا: ينصف $\overline{جـى}$ ثالثا: يوازى $\overline{ىهـ}$

الحــــل:

$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق}_1 + \overleftarrow{ق}_2 + \overleftarrow{ق}_3$

$= (2\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}) + (4\overleftarrow{س} - 3\overleftarrow{ص}) + (-3\overleftarrow{س} - 2\overleftarrow{ص}) = 3\overleftarrow{س} - 4\overleftarrow{ص}$

عزم المحصلة حول ب:

$\because \overleftarrow{ر}_{ب} = \overleftarrow{بأ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (0 ، 2) - (3 ، -2) = (-3 ، 4)$

$\therefore \overleftarrow{جـ}_{ب} = \overleftarrow{ر}_{ب} \times \overleftarrow{ح} = (-3 ، 4) \times (3 ، -4) = (12 - 12)\overleftarrow{ع} = 0\,\overleftarrow{ع}$

$\because \overleftarrow{جـ}_{ب} = \overleftarrow{0}$ $\therefore$ خط عمل المحصلة يمر بنقطة ب وهو المطلوب أولا

عزم المحصلة حول جـ:

$\because \overleftarrow{ر}_{جـ} = \overleftarrow{جـأ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{جـ} = (0 ، 2) - (2 ، 3) = (-2 ، -1)$

$\therefore \overleftarrow{جـ}_{جـ} = \overleftarrow{ر}_{جـ} \times \overleftarrow{ح} = (-2 ، -1) \times (3 ، -4) = (8 + 3)\overleftarrow{ع} = 11\overleftarrow{ع}$ (١)

عزم المحصلة حول ى :

$\because \overleftarrow{ر}_{ى} = \overleftarrow{ىأ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ى} = (0 ، 2) - (-2 ، 1) = (2 ، 1)$

$\therefore \overleftarrow{جـ}_{ى} = \overleftarrow{ر}_{ى} \times \overleftarrow{ح} = (2 ، 1) \times (3 ، -4) = (-8 - 3)\overleftarrow{ع} = -11\overleftarrow{ع}$ (٢)

من (١) ، (٢) $\because \overleftarrow{جـ}_{جـ} = -\overleftarrow{جـ}_{ى}$ $\therefore$ خط عمل المحصلة ينصف $\overline{جـى}$ وهو المطلوب ثانيا

عزم المحصلة حول هـ :

∵ $\overrightarrow{ر_{هـ}} = \overrightarrow{هـ أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{هـ} = (٠ ، ٢) - (-٥ ، ٥) = (٥ ، -٣)$

∴ $\overrightarrow{جـ_{هـ}} = \overrightarrow{ر_{هـ}} \times \overrightarrow{ح} = (٥ ، -٣) \times (٣ ، -٤) = (-٢٠ + ٩)\overrightarrow{ع} = -١١\overrightarrow{ع}$ (٣)

من (٢) ، (٣) ∵ $\overrightarrow{جـ_{ء}} = \overrightarrow{جـ_{هـ}}$ ∴ خط عمل المحصلة يوازى $\overline{ءهـ}$ وهو المطلوب ثالثا

مثـــال:

أ ب جـ د هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم ،أثرت القوى ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ نيوتن فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جب}$ ، $\overrightarrow{دجـ}$ ، $\overrightarrow{دهـ}$ ، $\overrightarrow{هـو}$ ، $\overrightarrow{وأ}$ على الترتيب اوجد المجموع الجبرى لعزوم القوى: حول الرأس أ وحول مركز المسدس

الحـــل:

العزوم حول أ : القوتان ٨ ، ٣ عزمها حول أ = ٠

$أ ن = أ ط = \frac{ل\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٢} = ٥\sqrt{٣}$ سم

، $أ هـ = أ جـ = ل\sqrt{٣} = ١٠\sqrt{٣}$ سم

∴ $جـ_{أ} = -٧ \times أن - ٦ \times أهـ + ٥ \times أجـ + ٤ \times أط$

$= -٧ \times ٥\sqrt{٣} - ٦ \times ١٠\sqrt{٣} + ٥ \times ١٠\sqrt{٣} + ٤ \times ٥\sqrt{٣} = -٢٥\sqrt{٣}$ نيوتن .سم

العزوم حول مركز المسدس م:

الأبعاد العمودية بين مركز المسدس وخطوط عمل جميع القوى ستكون متساوية

وعموما طول العمود الساقط من مركز المسدس على اى ضلع من الأضلاع $= \frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$

∴ البعد العمودى لجميع القوى $= \frac{ل\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٢} = ٥\sqrt{٣}$ سم

∴ $جـ_{م} = (-٣ + ٤ + ٥ - ٦ - ٧ - ٨) \times ٥\sqrt{٣} = -٧٥\sqrt{٣}$ نيوتن .سم

تذكر أن: فى السداسى المنتظم إذا كان طول ضلعه = ل فإن:

١) جميع الأضلاع متساوية = ل وجميع الزوايا متساوية وقياس كل منها ١٢٠°

٢) طول القطر الواصل بين رأسين غير متتالين = $ل\sqrt{٣}$

٣) طول القطر الواصل بين رأسين متقابلين = ٢ل

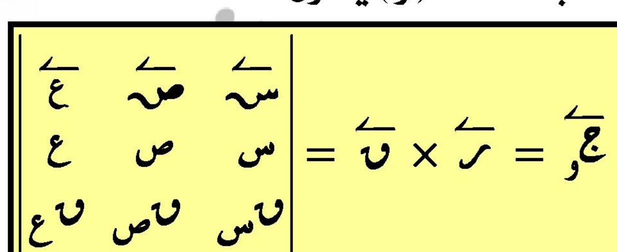
٢ - ٢ عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد

عزم قوة حول نقطة فى الفراغ:

إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}} = (\text{ق}_{\text{س}} ، \text{ق}_{\text{ص}} ، \text{ق}_{\text{ع}})$

وكان $\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع})$ متجه موضع النقطة أ

فإن عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة (و) يساوى



$$\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & \text{ق}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

ويكون طول العمود المرسوم من النقطة (و) على خط عمل القوة هو (ل) حيث:

$$\text{ل} = \frac{\|\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{و}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ق}}\|}$$

مثـــال:

أوجد عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة الأصل حيث $\overrightarrow{\text{ق}} = -٢ \overrightarrow{\text{س}} + ٣ \overrightarrow{\text{ص}} + ٥ \overrightarrow{\text{ع}}$ وتؤثر فى نقطة أ التى متجه موضعها هو $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ وأوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$.

الحـــل:

$\because \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}} = (١ ، ١ ، ١)$

$$\therefore \overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (١ ، ١ ، ١) \times (-٢ ، ٣ ، ٥) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ١ & ١ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

$= (١ \times ٥ - ١ \times ٣)\overleftarrow{\text{س}} - (١ \times ٥ + ١ \times ٢)\overleftarrow{\text{ص}} + (١ \times ٣ + ١ \times ٢)\overleftarrow{\text{ع}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} - ٧\overleftarrow{\text{ص}} + ٥\overleftarrow{\text{ع}}$ وحدة عزم

$\therefore \text{ل} = \frac{\|\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\|}{\|\overleftarrow{\text{ق}}\|} = \frac{\sqrt{٢^٢ + (-٧)^٢ + ٥^٢}}{\sqrt{(-٢)^٢ + ٣^٢ + ٥^٢}} = \frac{\sqrt{٧٤١}}{١٩} = ١,٤$ وحدة طول

مثـــال:

إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} + ٣\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}}$ تؤثر فى نقطة أ(١ ، −١ ، ٤) إوجد:

(أ) عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول نقطة الأصل و(٠ ، ٠ ، ٠)

(ب) عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول نقطة ب (٢ ، −٣ ، ١) وطول العمود المرسوم من ب على خط عمل القوة.

الحـــل:

(أ) $\because \overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{وأ}} = \overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{و}} = (١ ، -١ ، ٤)$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = (١ ، -١ ، ٤) \times (٢ ، ٣ ، -١) = \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ ١ & -١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

$= (١ \times ١ - ٣ \times ٤)\overleftarrow{\text{س}} - (-١ \times ١ - ٢ \times ٤)\overleftarrow{\text{ص}} + (١ \times ٣ + ١ \times ٢)\overleftarrow{\text{ع}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = -١١\overleftarrow{\text{س}} + ٩\overleftarrow{\text{ص}} + ٥\overleftarrow{\text{ع}}$ وحدة عزم

(ب) $\because \overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{بأ}} = \overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} = (١ ، -١ ، ٤) - (٢ ، -٣ ، ١) = (-١ ، ٢ ، ٣)$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = (-١ ، ٢ ، ٣) \times (٢ ، ٣ ، -١) = \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

$= (-١ \times ٢ - ٣ \times ٣)\overleftarrow{\text{س}} - (١ \times ١ - ٢ \times ٣)\overleftarrow{\text{ص}} + (-١ \times ٣ - ٢ \times ٢)\overleftarrow{\text{ع}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = -١١\,\overrightarrow{\text{س}} + ٥\,\overrightarrow{\text{ص}} - ٧\,\overrightarrow{\text{ع}}$ وحدة عزم

$\therefore \text{ل} = \dfrac{\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ب}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ق}}\|} = \dfrac{\sqrt{(-١١)^{٢} + ٥^{٢} + (-٧)^{٢}}}{\sqrt{٢^{٢} + ٣^{٢} + (-١)^{٢}}} \simeq ٣,٧٣$ وحدة طول

مثـــال:

فى الشكل المقابل:

قوة مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر فى القطر $\overline{\text{أب}}$ فى متوازى مستطيلات ابعاده ٣م ، ٤م ، ١٢م كمابالشكلأوجد عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول النقطة ء



الحـــل:

من هندسة الشكل إحداثيات النقط هى:

$\text{أ} = (٠،٠،٣)$ ، $\text{ب} = (٤،١٢،٠)$ ، $\text{ء} = (٠،١٢،٠)$

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٤،١٢،٠) - (٠،٠،٣) = (٤،١٢،-٣)$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{٤^{٢} + ١٢^{٢} + (-٣)^{٢}} = ١٣$

$\therefore \overrightarrow{\text{ق}} = \text{ق}\left(\dfrac{\overrightarrow{\text{أب}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|}\right) = ١٣٠ \times \dfrac{(٤،١٢،-٣)}{١٣} = (٤٠،١٢٠،-٣٠)$

$\because \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ءب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{ء}} = (٤،١٢،٠) - (٠،١٢،٠) = (٤،٠،٠)$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (٤،٠،٠) \times (٤٠،١٢٠،-٣٠) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٤ & ٠ & ٠ \\ ٤٠ & ١٢٠ & -٣٠ \end{vmatrix}$$

$$= (٠ - ٠)\,\overrightarrow{\text{س}} - (-٤ \times ٣٠ - ٠)\,\overrightarrow{\text{ص}} + (٤ \times ١٢٠ - ٠)\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

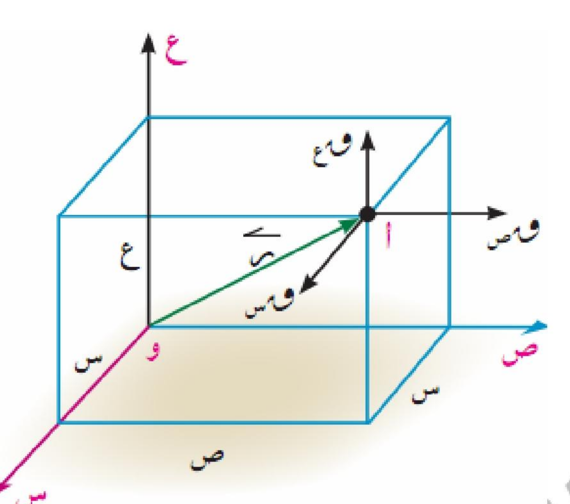
$\therefore \overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ء}} = ١٢٠\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٤٨٠\,\overrightarrow{\text{ع}}$ وحدة عزم

المركبات الإحداثية لعزم قوة بالنسبة لنقطة:

بفرض $\overleftarrow{ق} = (ق_س ، ق_ص ، ق_ع)$ تؤثر فى نقطة أ

متجه موضعها حول نقطة الأصل $\overleftarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$

فإن عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة (و) يساوى

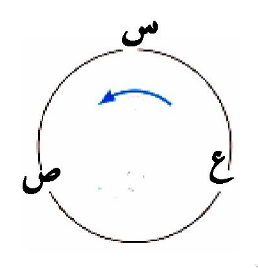


$$\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_س & ق_ص & ق_ع \end{vmatrix}$$

$$= (ص ق_ع - ع ق_ص)\overleftarrow{س} + (ع ق_س - س ق_ع)\overleftarrow{ص} + (س ق_ص - ص ق_س)\overleftarrow{ع}$$

أى أن عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ له ٣ مركبات هى:
مركبة فى إتجاه محور س ومركبة فى إتجاه محور ص ومركبة فى إتجاه محور ع

وبأخذ عزم $ق_س ، ق_ص ، ق_ع$ حول محور س نجد أن:
$ق_س$ ليس لها عزم دورانى حول محور س لأنها توازى محور س أى أن عزمها يساوى صفر
، $ق_ص$ تعمل على الدوران حول محور س فى إتجاه عقارب الساعة فيكون عزمها $- ع \times ق_ص$
، $ق_ع$ تعمل على الدوران حول محور س فى إتجاه عكس عقارب الساعة فيكون عزمها $ص \times ق_ع$
∴ مركبة العزم فى إتجاه محور س تساوى $ص ق_ع - ع ق_ص$

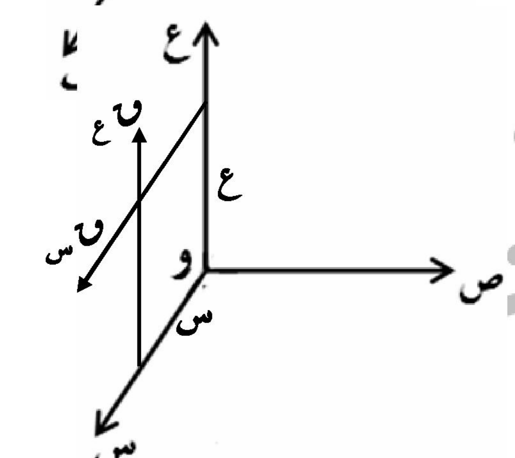


وبالمثل بالنسبة لمركبات العزم فى إتجاه ص ، ع
∴ مركبة العزم فى إتجاه محور ص تساوى $ع ق_س - س ق_ع$
∴ مركبة العزم فى إتجاه محور ع تساوى $س ق_ص - ص ق_س$

مثـــال:

إذا كانت $\overleftarrow{ق} = ك \overleftarrow{س} + م \overleftarrow{ص} - ٢ \overleftarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ التى متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overleftarrow{ر} = (٣ ، ١ ، ١)$ فإذا كانت مركبتا عزم $\overleftarrow{ق}$ حول محورى س ، ص هما $-١ ، -٨$ على الترتيب أوجد قيمة كل من ك ، م.

الحــــل:



$\because \overleftarrow{ق} = ك \overleftarrow{س} + م \overleftarrow{ص} - ٢ \overleftarrow{ع}$

$\therefore ق_{س} = ك$ ، $ق_{ص} = م$ ، $ق_{ع} = -٢$

، $\because \overleftarrow{ر} = (٣ ، ١ ، ١)$

$\therefore$ س = ٣ ، ص = ١ ، ع = ١

$\because$ مركبة عزم القوة حول محور س = ص$ق_{ع}$ − ع$ق_{ص}$

$\therefore -١ = ١ \times (-٢) - ١ \times م$

$\therefore م = -٢ + ١$ $\boxed{\therefore م = -١}$

$\because$ مركبة عزم القوة حول محور ص = ع$ق_{س}$ − س$ق_{ع}$

$\therefore -٨ = ١ \times ك - ٣ \times (-٢)$

$\therefore ك = -٨ - ٦$ $\boxed{\therefore ك = -١٤}$

مثــــال:

إذا كانت $\overleftarrow{ق} = ٣ \overleftarrow{س} + ك \overleftarrow{ص} + ٤ \overleftarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ = (١ ، ٠ ، −١) وكان عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة ب = (٢ ، −١ ، ٣) يساوى $١٢ \overleftarrow{س} - ٨ \overleftarrow{ص} - ٥ \overleftarrow{ع}$ فما قيمة ك.

الحــــل:



تذكر أن:

$\overleftarrow{ر}$ هو المتجه الواصل من مركز العزم إلى أى نقطة على خط عمل القوة

$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ب أ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}$

$= (١ ، ٠ ، −١) − (٢ ، −١ ، ٣) = (−١ ، ١ ، −٤)$

$\therefore$ س = −١ ، ص = ١ ، ع = −٤

$\because \overleftarrow{ق} = ٣ \overleftarrow{س} + ك \overleftarrow{ص} + ٤ \overleftarrow{ع}$

$\therefore ق_{س} = ٣$ ، $ق_{ص} = ك$ ، $ق_{ع} = ٤$

$\because$ مركبة عزم القوة حول محور س = ص$ق_{ع}$ − ع$ق_{ص}$

$\therefore ١٢ = ١ \times ٤ - (-٤) \times ك$ $\therefore ٤ك = ١٢ - ٤ = ٨$ $\therefore ك = ٢$

